Teoremas de Inversión

El Teorema de Hadamard-Levy y resultados similares

Luis Ángel Calderón Pérez

Universidad de Extremadura [luisangcp@gmail.com]

Introducción

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde U es abierto conexo, una función diferenciable sobre U. ¿Qué condiciones podemos exigirle a f para que admita inversa diferenciable? (denominaremos a esta cuestión como (PI), problema de inversión). Si $n = 1$, es un resultado conocido de cálculo que una condición necesaria y suficiente es que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in U$.

Sin embargo, si $n > 1$, esta condición trasladada a varias variables (es decir, $\det Df(x) \neq 0$ para todo $x \in U$) es necesaria pero no suficiente, pues no permite garantizar que la aplicación sea inyectiva. Sin embargo, si añadimos como hipótesis la inyectividad de f, por el Teorema de Invarianza de Dominios la aplicación sería abierta, y por tanto la extensión a varias variables pasaría a ser válida.

Desde otro punto de vista, un resultado clásico del Analisis, el Teorema de la Función Inversa, afirma que, si f es de clase 1, la condición $\det Df(x) \neq 0$ es suficiente para que f sea un difeomorfismo local, y además este difeomorfismo local es una aplicación abierta, por lo que solo faltaría el carácter inyectivo para alcanzar el grado de difeomorfismo (global).

Queda claro, por tanto, que se persigue la inyectividad de f. Sin embargo, en un caso práctico, la inyectividad de una aplicación es difícilmente comprobable. De este modo, el objetivo central del trabajo es el siguiente: **dado un difeomorfismo local de clase 1 entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, buscar condiciones más fácilmente comprobables que la inyectividad y que la impliquen, para conseguir así que nuestra aplicación sea, en realidad, un difeomorfismo**. Utilizando la herramienta topológica de los levantamientos de arcos (desarrolladas especialmente en [4]), se prueba que son condiciones válidas las hipótesis clásicas del Teorema de Hadamard-Levy, así como el carácter propio de la aplicación añadiendo ciertas propiedades topológicas a los abiertos ([1] y [2]). Asimismo, se estudian condiciones alternativas a estas dos, y se presenta la demostración del Teorema de Invarianza de Dominios, nombrado anteriormente, utilizando el Teorema de Poincaré-Miranda, una generalización del Teorema de Bolzano al caso multidimensional ([3]).

Acerca del problema de inversion

Teorema 1. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde U es abierto conexo, una función de clase 1 sobre U. Entonces: (PI) $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y $\det Df(x) \neq 0$.*

Se razona con facilidad que tres condiciones necesarias y suficientes para que f sea un difeomorfismo son que $\det Df(x) \neq 0$, que f sea inyectiva y que sea abierta (lo cual prueba $\Rightarrow$). El Teorema de la Función Inversa afirma que $\det Df(x) \neq 0 \Rightarrow f$ es un difeomorfismo local y, por tanto, que f es abierta. Uniendo esto a la inyectividad, f es un difeomorfismo global, como queríamos probar.

Notar que $\det Df(x) \neq 0$ no implica que f sea inyectiva, como muestra el ejemplo $f(x, y) = (e^x cosy, e^x seny)$, cuyo $\det Df(x) = e^{2x} \neq 0$ para todo x y que, sin embargo, no es inyectiva pues es periódica en la y.

Teoremas de inversión global

Definición 1. *Sea $f : M \to N$ una aplicación entre espacios topológicos. Diremos que f es propia si $f^{-1}(K)$ es un compacto de M para todo compacto K de N.*

Definición 2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una función de clase 1. Diremos que f verifica la condición de Hadamard-Levy si existe $A > 0$ tal que $\|Df(x)^{-1}\| < A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 2 (Clásico de inversión global)**.** *Sea $f : U \to V$ un difeomorfismo local de clase 1 entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Son condiciones suficientes para que f sea inyectiva:*

1) *Que f sea propia, U sea conexo y V simplemente conexo.*
2) *Que f verifique la condición de Hadamard-Levy, con $U = V = \mathbb{R}^n$.*

Para la demostración de este resultado, se prueba previamente que si f es un difeomorfismo local que es propio o que verifica la condición de Hadamard-Levy (con $U = V = \mathbb{R}^n$), entonces podemos garantizar la existencia y unicidad de levantamientos de arcos a través de f. Cabe resaltar que, sin más que exigir que V sea conexo, se obtiene de modo natural que f ha de ser epiyectiva.
Si bien las dos condiciones enunciadas en el teorema anterior son las que clásicamente se utilizan, añadimos a continuación hipótesis alternativas de más sencilla comprobación.
Resaltamos también que la condición de que f cumpla la condición de Hadamard-Levy no es necesaria para que f sea un difeomorfismo, como se comprueba con la función:

$$f(t) = \begin{cases} L(1+t) & si \quad t \geq 0 \\ -L(1-t) & si \quad t \leq 0 \end{cases}$$ donde L denota el logaritmo neperiano.

Aportamos pues en el siguiente resultado una condición derivada de esta que sí es necesaria, y además relaja las condiciones para los abiertos.
Antes de enunciar el teorema, introducimos las condiciones alternativas obtenidas:

Definición 3. *Una aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde U es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, se dice no-coercitiva, si para todo $\gamma > 0$, existe un compacto $D_\gamma \subset U$ tal que $\|f(x)\| > \gamma$ para todo $x \notin D_\gamma$.*

Definición 4. *Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice estrictamente monótona si existe $k > 0$ tal que $\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq k\|y - x\|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde $\langle , \rangle$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3. *Sea $f : U \to V$ un difeomorfismo local de clase 1 entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Son condiciones suficientes para que f sea inyectiva:*

1) *Que f verifique la condición de Hadamard-Levy y que $U = V = \mathbb{R}^n$.*
2) *Que f sea estrictamente monótona, con $U = V = \mathbb{R}^n$.*

Mientras que son necesarias y suficientes las siguientes:

3) *Que f sea propia, con U conexo y V simplemente conexo.*
4) *Que f sea no-coercitiva, con U conexo y $V = \mathbb{R}^n$.*
5) *Que f verifique que para cada compacto K de V, exista un $A_k > 0$ tal que $\|Df(x)^{-1}\| < A_k$ para todo $x \in f^{-1}(K)$ (condición mencionada anteriormente, que se debe a Patrick J. Rabier), con V simplemente conexo y U conexo tal que se verifica que no hay ninguna sucesión (x_n) en U tal que $\lim_{n\to\infty} x_n \in \partial U$ y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in V$.*

Se prueba con facilidad que la condición de ser no-coercitiva es equivalente al carácter propio. Es más, si $U = \mathbb{R}^n$, ser no-coercitivo equivale a que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$. También es fácil comprobar que si f es estrictamente monótona, entonces $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$ y por tanto, f es propia.
En cuanto a la condición de Rabier, es sencillo demostrar que es una condición necesaria para que f sea inyectiva. Sin embargo, el carácter suficiente precisa de unas herramientas mucho más complejas, como se puede observar en [6].

Teorema de invarianza de dominios

Teorema 4 (Teorema de Invarianza de Dominios)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua e inyectiva definida sobre un abierto. Entonces, $f(U)$ es abierto.*

De modo esquemático, toda aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ continua e inyectiva es abierta. De este resultado se obtiene como corolario la versión más conocida del Teorema de Invarianza de Dominios.

Teorema 5 (Versión habitual Teorema de Invarianza de Dominios)**.** *No existen aplicaciones continuas e inyectivas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ si $m < n$.*

En la demostración del Teorema de Invarianza de Dominios se utiliza el Teorema de Poincaré-Miranda, que esencialmente es una generalización del Teorema de Bolzano.

Teorema 6 (Teorema de Poincaré-Miranda)**.** *Sea $a \geq 0$ y sea $I^n = [-a, a]^n$. Sean $I_i^+ = \{x \in I^n : x_i = a\}$, $I_i^- = \{x \in I^n : x_i = -a\}$. Sea $f : I^n \to \mathbb{R}^n$ continua, $f = (f_1, ..., f_n)$, tal que para cada $i \leq n$, $f_i(I_i^-) \subset (-\infty, 0]$, $f_i(I_i^+) \subset [0, \infty)$. Entonces, existe $c \in I_n$ tal que $f(c) = 0$ (donde 0 denota el cero de $\mathbb{R}^n$).*

Sin embargo, en vez de abordar directamente la demostración de dicho Teorema, demostramos su equivalencia con el Teorema del punto fijo de Brouwer (como se prueba en [5]), resultado que se estudia en el Grado de Matematicas de esta Universidad.

Teorema 7 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Toda aplicación continua $f : I^n \to I^n$ admite un punto fijo.*

Referencias

[1] A. Ambrosetti and G. Prodi. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
[2] A. Avez. *Calcul différentiel*. Maîtrise de mathématiques pures. Masson, 1983.
[3] Władysław Kulpa, *Poincaré and domain invariance theorem*, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 39 (1998), No. 1-2, 127–136.
[4] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, and W. Rheinboldt. *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*. Computer science and applied mathematics. Elsevier Science, 2014.
[5] L.C. Piccini, A. LoBello, G. Stampacchia, and G. Vidossich. *Ordinary Differential Equations in Rn: Problems and Methods*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.
[6] Patrick J. Rabier. Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds. *Ann. of Math, (2)*, 146(3):647-691, 1997.